

Санкт Петербургский Государственный Университет  
Физико-Технический Институт им. А.Ф. Иоффе РАН

**Магнитооптические явления в полупроводниках и  
полупроводниковых наноструктурах**

Учебное пособие

Кочерешко В.П., Серов А.Ю.

Издательство Санкт Петербургского Университета

## Оглавление

Предисловие	2
Введение	3
1. Электромагнитные волны в кристаллах	5
2. Тензор диэлектрической проницаемости. Общие свойства	11
3. Частотная дисперсия и двойное лучепреломление	12
4. Гиротропия. Естественная оптическая активность	18
5. Влияние магнитного поля	23
5.1. Линейные по магнитному полю эффекты.	
<i>Круговое магнитное двупреломление (Эффект Фарадея)</i>	25
5.2. Квадратичное двупреломление (Эффект Фогта)	27
5.3. Эффект Зеемана для экситона	28
5.4. Магнитооптический эффект Керра	32
6. Эффекты квадратичной пространственной дисперсии	36
7. Билинейные по магнитному полю и волновому вектору слагаемые	38
7.1. Эффект инверсии магнитного поля	39
7.2. Эффект взаимного магнито-индуцированного двуллучепреломления в гексагональных кристаллах	40
7.3. Эффект взаимного магнито-индуцированного двуллучепреломления в кубических кристаллах	44
7.4. Эффект четности в оптических спектрах экситонов в квантовых ямах	45
8. Поправки к эффектам Фарадея и Фогта связанные с пространственной дисперсией	48
9 Заключение	50
Приложение 1 Механический экситон	51
Примеры	56
Приложение 2 Экситонный вклад в тензор диэлектрической проницаемости	62
Литература	66

## Предисловие

Книга написана на основе лекций, которые авторы читают уже много лет на кафедре Физики Твердого Тела в Санкт Петербургском Государственном Университете. В ней предпринята попытка комплексного и последовательного описания различных магнитооптических явлений, в основном связанных с экситонами. Рассмотрены как классические, давно известные магнитооптические эффекты, так и новые, обнаруженные совсем недавно.

Когда исследование сталкивается с затруднениями, часто возникает необходимость "все зачеркнуть" и начать сначала. Поэтому очень важно понимать, откуда что берется. Идея этой книги - по возможности вести изложение "от Адама", так чтобы пытливый исследователь мог все изложенное подтвердить или опровергнуть. Особенно важно такое понимание для начинающих исследователей. Только так можно найти что-то действительно новое или понять непонятое старое.

Еще Фарадей верил в то, что можно «намагнитить» свет. Оказалось, что можно не только «намагнитить» свет магнитным полем, но и с помощью света создать квазистационарное магнитное поле. Более того, оказывается, что светом можно заставить двигаться экситоны и электроны. Обо всем этом можно прочитать в настоящей книге.

Авторы благодарят Л.Е.Голуба и В.Ф.Агеяна за внимательное прочтение и полезные замечания.

## Введение

Разнообразие явлений природы неисчерпаемо. Не существует такой области знаний, в которой все известно и давно исследовано. В любой области можно найти что-то новое, не замеченное более ранними исследователями. Часто возникает потребность, не вдаваясь в детали проанализировать возможность наблюдения того или иного явления, а иногда и попытаться понять, действительно ли мы наблюдаем явление природы или это ошибка эксперимента.

Для этого часто оказывается полезным феноменологическое описание электромагнитных явлений. Такое описание плодотворно для ответа на вопросы:

- Какие явления можно ожидать в той или иной конкретной геометрии эксперимента?
- Каких явлений вообще быть не может?
- Какова симметрия тех или иных явлений?

Проблема состоит в том, что как правило, при феноменологическом описании не удается оценить величины ожидаемых явлений. Для этого необходим микроскопический подход. В данной книге мы будем рассматривать различные оптические и магнитооптические явления в кристаллах различной симметрии в разнообразных наноструктурах. Главным инструментом этих исследований будет тензор диэлектрической проницаемости.

Тензор диэлектрической проницаемости устанавливает линейную связь между электрической индукцией и электрическим полем:

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})E_j(\omega, \mathbf{k}). \quad (B1)$$

Линейность соотношения (B1) предполагает справедливость и обратного соотношения:

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})D_j(\omega, \mathbf{k}). \quad (B2)$$

Формулы (B1, B2) означают, что электрическое поле вызывает индукцию, пропорциональную этому полю. При приложении достаточно слабых внешних статических полей (электрического  $\mathbf{E}^0$ , магнитного  $\mathbf{H}^0$  или поля деформаций) тензор диэлектрической проницаемости можно разложить по степеням этих полей. Например:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{H}, \mathbf{E}) = & \varepsilon_{ij}^0(\omega) + i\gamma_{ijl}(\omega)k_l + A_{ijl}^{(1)}(\omega)H_l^0 + B_{ijl}^{(1)}(\omega)E_l^0 + \\ & + A_{ijkl}^{(2)}(\omega)H_k^0k_l + B_{ijkl}^{(2)}(\omega)E_k^0k_l + C_{ijkl}^{(2)}(\omega)H_k^0H_l^0 + D_{ijkl}^{(2)}(\omega)E_k^0E_l^0 + \dots \end{aligned} \quad (B3)$$

Из этого разложения видно, что линейная связь имеется не только между индукцией  $\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k})$  и электромагнитным полем  $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$  при фиксированных статических полях  $\mathbf{E}^0$  и  $\mathbf{H}^0$ , но также существует линейная связь между индукцией  $\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k})$ , и статическими полями  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$  и их отдельными компонентами, а также между различными комбинациями произведений этих компонент при фиксированном поле  $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$ . Статические поля в (B3)  $\mathbf{E}^0$  и  $\mathbf{H}^0$  оказываются, в опрежележенном смысле, равноправными с полями  $\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k})$  и  $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$ .

Отдельные слагаемые в (B2), (B3) можно трактовать как изменение величины и поляризации электромагнитной волны под действием внешних статических полей, но можно их трактовать и как возникновение дополнительных квазистатических полей при изменении состояния поляризации или величины электромагнитного поля  $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$ .

Например, четвертое слагаемое в (B3), описывающее эффект Погкельса означает изменение поляризации проходящего света под действием электрического поля. Эффект обратный эффекту Погкельса состоит в возникновении статического (квазистатического)

электрического поля при прохождении через кристалл поляризованного света. Это одна из разновидностей многообразных фотогальванических и фотовольтаических эффектов.

Описание эффекта обратного эффекту Фарадея, (третье слагаемое в (B2), (B3)) звучат так: «возникновение магнитного поля (намагниченности) при прохождении через среду циркулярно поляризованной электромагнитной волны».

Часто бывает удобно установить независимые компоненты тензоров, входящих в разложение (B3). Это не трудно сделать, рассматривая преобразование этих тензоров под действием операций симметрии кристалла, если иметь в виду что тензор диэлектрической проницаемости связывает компоненты индукции и электрического поля (B1).

Очевидно, что правая и левая части этого уравнения должны преобразовываться при операциях симметрии кристалла одинаковым образом. В левой части стоит вектор, следовательно, правая часть равенства также должна преобразовываться как вектор.

$D_i(\omega, \mathbf{k})$  - это компоненты вектора, следовательно  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})E_j(\omega, \mathbf{k})$  также должны преобразовываться при преобразованиях группы симметрии кристалла как компоненты вектора (B4).

Таким образом, произведения различных компонент волнового вектора  $k_m$ , магнитного поля  $H_k$ , электрического поля  $E_l$ , поля напряжений  $u_{mn}$  и т.д. вместе с электромагнитным полем  $E_j(\omega, k)$  должны образовывать вектор.

Анализ свойств тензора диэлектрической проницаемости позволяет не только классифицировать известные явления, но и предсказывать новые, еще не известные.

## 1. Электромагнитные волны в кристаллах

Вначале кратко напомним некоторые общие сведения, об электромагнетизме. Электромагнитные явления описываются уравнениями Максвелла. Эти уравнения представляют собой «концентрированное» выражение экспериментальных фактов.

Так закон индукции Фарадея гласит: «изменение магнитного поля  $\mathbf{B}$  приводит к возникновению вихревого электрического поля  $\mathbf{E}$ ». Символически, это можно записать так:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.1)$$

Здесь  $c$  пока что просто коэффициент пропорциональности.

Закон Кулона «Источником электрического поля являются электрические заряды» приводит к уравнению:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.2)$$

Здесь  $\rho$  - плотность заряда.

Еще один экспериментальный факт состоит в том, что «Протекающий электрический ток приводит к возникновению вихревого магнитного поля». Это утверждение известно как закон Эрстеда и может быть записано таким образом:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}.$$

В это уравнение следует добавить еще одно слагаемое, так называемый «ток смещения»:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.3)$$

Появление тока смещения в (1.3) обусловлено требованием непрерывности потока зарядов:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{J} = 0.$$

Закон отсутствия магнитных зарядов приводит к соотношению:

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \quad (1.4)$$

Комбинируя (1.1) и (1.3), получим волновое уравнение  $\left(\Delta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0$ , из которого видно,

что коэффициент пропорциональности  $c$  является скоростью распространения волны, в данном случае электромагнитной. Источниками электромагнитного поля являются заряды и вызванные движением зарядов токи. В единице объема материальной среды имеется  $\sim 10^{23}$  зарядов  $\rho_i$  и молекулярных токов  $j_i$ . Следовательно, для описания свойств среды необходимы как минимум  $\sim 10^{23}$  уравнений. Очевидно, что для использования уравнений электромагнитного поля надо сократить их число. Для этого необходимо произвести усреднение микроскопических уравнений по физически бесконечно малому объему и физически бесконечно малому интервалу

времени. С этой целью определим усредненные поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , а также усредненные заряды  $\rho$  и токи  $\mathbf{J}$ .

$$\rho + \rho_0 = \langle \rho_i \rangle ; \mathbf{J} + \mathbf{J}_0 = \langle \mathbf{j}_i \rangle ; \mathbf{E} = \langle \mathbf{E}_i \rangle ; \mathbf{B} = \langle \mathbf{B}_i \rangle , \quad (1.5)$$

Здесь выделены внешние  $\rho$ ,  $\mathbf{J}$  и внутренние  $\rho_0$ ,  $\mathbf{J}_0$  заряды и токи. В результате, для этих величин получим систему уравнений Максвелла в среде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_0) , \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi (\rho + \rho_0) , \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 . \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для того, чтобы исключить внутренние токи и заряды, определим новые поля  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$  так, чтобы для них, по возможности, получились уравнения похожие на уравнения Максвелла в пустоте. Эти новые поля называются *вектором электрической индукции*  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$  и *вектором напряженности магнитного поля*  $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$ . (Логичнее напряженностью магнитного поля было бы называть вектор  $\mathbf{B}$ , так как именно он является аналогом вектора  $\mathbf{E}$ . Однако по историческим причинам сложились такие названия. Вектор  $\mathbf{B}$  называют вектором индукции поля, а вектор  $\mathbf{H}$  вектором напряженности). Здесь  $\mathbf{P}$  - поляризуемость и  $\mathbf{M}$  - намагниченность связаны с внутренними зарядами и токами  $\rho_0$  и  $\mathbf{J}_0$ . Определим  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{P} &= -\rho_0 , \\ \mathbf{J}_0 &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \cdot \operatorname{rot} \mathbf{M} . \end{aligned} \quad (1.7)$$

В результате для системы полей  $BEHD$  получим систему уравнений, по форме совпадающую с уравнениями Максвелла в вакууме.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} , \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho , \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 . \end{aligned} \quad (1.8)$$

Как следует из (1.6) и (1.7) для полного описания электромагнитных свойств материальной среды эту систему следует дополнить материальными уравнениями устанавливающими связь между полями  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ , а также  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ . С этой целью определим тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} D_i &= \varepsilon_{ij} E_j , \\ B_i &= \mu_{ij} H_j . \end{aligned} \quad (1.9)$$

Следует заметить, что эта система переопределена. В действительности для описания всех свойств среды, как электрических, так и магнитных, достаточно одного только тензора диэлектрической проницаемости. Введение тензора магнитной проницаемости - это вопрос удобства, он полезен только при описании специфических свойств магнитных сред.

По определению,  $\varepsilon_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}')$  является функцией линейного отклика на  $\delta$  образное внешнее воздействие:

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int dr' \varepsilon_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(\mathbf{r}', t') . \quad (1.10)$$

Так как отклик следует за причиной, а не наоборот, то интегрировать следует от  $-\infty$  до  $t$ . Для однородной в пространстве и времени среды, произведя преобразование Фурье, получим:

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) . \quad (1.11)$$

Иногда бывает удобнее пользоваться обратным тензором диэлектрической проницаемости:

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) D_j(\omega, \mathbf{k}) . \quad (1.12)$$

Поляризуемость связана с электрическим полем  $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$  через тензор восприимчивости  $\chi_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ . По определению

$$P_j(\omega, \mathbf{k}) = \chi_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_i(\omega, \mathbf{k}) \text{ или } \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + 4\pi\chi_{ij}(\omega, \mathbf{k}) ,$$

где  $\delta_{ij}$  единичный тензор.

Важнейшую роль в описании оптических спектров кристаллов играют «нормальные электромагнитные волны». Нормальные электромагнитные волны - это плоские монохроматические волны, характеризующиеся определенными значениями частоты  $\omega$  и волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Такие волны имеют вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} , \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} , \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \tilde{n}(\omega, \mathbf{s}) , \quad (1.13)$$

Где  $\mathbf{E}_0$  - амплитуда,  $\tilde{n}(\omega, \mathbf{s})$  - комплексный показатель преломления,  $\tilde{n}(\omega, \mathbf{s}) = n(\omega, \mathbf{s}) + i\kappa(\omega, \mathbf{s})$ ,  $n(\omega, \mathbf{s})$  - вещественная часть показателя преломления,  $\kappa(\omega, \mathbf{s})$  - коэффициент поглощения света,  $\mathbf{s} = \mathbf{k} / k$  - единичный вектор в направлении распространения волны.

Для нормальных волн из уравнений Максвелла непосредственно следует:

$$\mathbf{D} = -\frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \times \mathbf{B}] ; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 ; \quad \mathbf{B} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}] ; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 . \quad (1.14)$$

Отсюда видно, что векторы  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  взаимно перпендикулярны. Заметим, что поле  $\mathbf{D}$ , в отличие от поля  $\mathbf{E}$ , всегда поперечно, именно оно является аналогом поля  $\mathbf{E}$  в вакууме.

Важной характеристикой электромагнитной волны в кристаллах является поток энергии, задаваемый вектором Пойнтинга:



$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \frac{c}{4\pi} \tilde{n}(\omega, \mathbf{k}) \{ \mathbf{s} E^2(\omega, \mathbf{s}) - \mathbf{E}(\omega, \mathbf{s}) (\mathbf{E}(\omega, \mathbf{s}) \cdot \mathbf{s}) \} . \quad (1.15)$$

Так как в анизотропной среде вектор  $\mathbf{E}$  не перпендикулярен вектору  $\mathbf{k}$ , то направления потока энергии  $\mathbf{S}$  и фазовой скорости волны, вообще говоря, не совпадают.

Нормальные электромагнитные волны, распространяющиеся в данной среде, полностью характеризуют электромагнитные свойства этой среды. Подставив (1.13) в уравнения Максвелла (1.8) легко увидеть, что нормальные электромагнитные волны удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{D} = \frac{c^2}{\omega^2} \{ k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \} . \quad (1.16)$$

Это равенство отражает тот факт, что поле  $\mathbf{D}$  совпадает по направлению с поперечной частью полного поля  $\mathbf{E}$ . Продольная же компонента поля  $\mathbf{E}$  равна  $\mathbf{s} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})$ . С другой стороны:

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) . \quad (1.17)$$

Из (1.16) и (1.17) следует уравнение

$$\left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - k^2 \delta_{ij} + k_i k_j \right) E_j(\omega, \mathbf{k}) = 0 . \quad (1.18)$$

Эта система уравнений определяет те нормальные волны, которые могут распространяться в данной среде. Система (1.18) имеет ненулевое решение при условии, что:

$$\text{Det} \left| \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - k^2 \delta_{ij} + k_i k_j \right| = 0 , \quad (1.19)$$

или

$$\text{Det} \left| \tilde{n}^2 (\delta_{ij} - s_i s_j) - \varepsilon_{ij} \left( \omega, \mathbf{s} \frac{\omega}{c} \tilde{n} \right) \right| = 0 . \quad (1.20)$$

Это основное уравнение кристаллооптики (уравнение Френеля), оно описывает закон дисперсии для нормальных электромагнитных волн  $\omega_i = \omega_i(\mathbf{k})$ . Определяя из (1.20) показатели преломления для всех нормальных волн  $\tilde{n}_i = \tilde{n}_i(\omega)$  можем найти сами нормальные волны,  $E_{0i} e^{i \left( \frac{\omega}{c} \tilde{n}_i \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - \omega t \right)}$  и установить их поляризацию. Далее используя граничные условия Максвелла и, если требуется, *дополнительные граничные условия\** для нормальных волн, мы можем рассчитать различные оптические свойства кристаллов.

Для обратного тензора  $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$  также можно написать дисперсионное уравнение:

$$\left( \frac{\omega^2}{c^2} \delta_{ij} - k^2 \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) + k_i k_j \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \right) D_j(\omega, \mathbf{k}) = 0 ,$$

$$\text{Det} \left| \frac{\omega^2}{c^2} \delta_{ij} - k^2 \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) + k_i k_j \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0 . \quad (1.21)$$

В одних случаях, удобнее пользоваться уравнением (1.19), а в других уравнением (1.21). Обратный тензор  $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$  удобен, например, вблизи полюсов тензора  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ .

Феноменологическое рассмотрение оптических явлений в материальных средах с помощью тензора диэлектрической проницаемости часто бывает очень полезным. Как следует из уравнений Максвелла, все свойства среды (может быть только за исключением механических) «спрятаны» в тензоре диэлектрической проницаемости. Отражение и поглощение света, люминесценция, рамановское рассеяние и даже проводимость кристаллов описываются тензором диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{K})$ . Конечно, тензор диэлектрической проницаемости, в основном, годится для описания свойств макроскопических объектов, размеры которых намного больше длины волны света и не годится для описания свойств нанобъектов. Однако, очевидно, что им можно пользоваться для анализа усредненных свойств массивов нанобъектов. Кроме того, даже одиночные нанобъекты часто находятся в объемной матрице, и тензором диэлектрической проницаемости уже можно пользоваться для описания свойств такой структуры в целом.

С помощью тензора диэлектрической проницаемости можно установить, какие явления могут иметь место в той или иной геометрии эксперимента. Можно даже качественно оценить соотношение между величинами явлений в разных геометриях. Однако для вычисления самих этих величин, разумеется, необходимо микроскопическое рассмотрение.

Из формулы (1.16) видно, что иногда бывает удобно воспользоваться поперечным тензором диэлектрической проницаемости, связывающем поперечные компоненты полей  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ . Так как поле  $\mathbf{D}$  всегда поперечно, из полного поля  $\mathbf{E}$  следует вычесть его продольную составляющую и найти связь между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}_\perp$ . Определим поперечный тензор диэлектрической проницаемости следующим образом:

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j = \varepsilon_{ij} E_{\parallel,j} + \varepsilon_{ij} E_{\perp,j} = \varepsilon_{\perp,ij} E_{\perp,j} . \quad (1.22)$$

Из свойства поперечности вектора  $\mathbf{D}$ : ( $\mathbf{s} \cdot \mathbf{D} = 0$ ) следует, что

$$s_i D_i = \varepsilon_{ij} s_i E_j = \varepsilon_{ij} s_i E_{\parallel,j} + \varepsilon_{ij} s_i E_{\perp,j} = 0 . \quad (1.23)$$

Разделим поле  $\mathbf{E}$  на поперечную и продольную компоненты:

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}_\perp = 0 \quad \mathbf{E}_\parallel = E_\parallel \cdot \mathbf{s} \quad (1.24)$$

Отсюда получаем:

$$E_{\parallel,i} = - \frac{\varepsilon_{ij} s_j E_{\perp,j}}{\varepsilon_{ri} s_r s_i} s_i \quad (1.25)$$

\*дополнительные граничные условия. При учете пространственной дисперсии одних граничных условий Максвелла может оказаться недостаточно. Например, если дисперсионное уравнение (1.20) имеет порядок выше второго по  $\tilde{n}^2$ , для решения задачи об отражении и пропускании света необходимо использовать дополнительные граничные условия.

Поперечный тензор диэлектрической проницаемости выражается через полный тензор диэлектрической проницаемости следующим образом:

$$\varepsilon_{\perp,ij} = \left( \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{il} \varepsilon_{mj} s_l s_m}{\varepsilon_{rr} s_r s_t} \right) \quad (1.26)$$

Здесь везде предполагается суммирование по повторяющимся индексам, что было предложено еще Эйнштейном. Поперечный диэлектрический тензор нам еще пригодится в **главе 7**. Однако, обычно проще пользоваться полным тензором диэлектрической проницаемости.

## 2. Тензор диэлектрической проницаемости. Общие свойства.

Тензор диэлектрической проницаемости может зависеть от частоты  $\omega$ , волнового вектора света  $\mathbf{k}$  и от внешних полей: электрического, магнитного и механических напряжений. Мы будем рассматривать зависимость  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{H})$  только от волнового вектора и внешнего магнитного поля.

Рассмотрим сначала некоторые общие свойства тензора диэлектрической проницаемости. Принцип симметрии кинетических коэффициентов [1, 2] требует, чтобы:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{H}) = \varepsilon_{ji}(\omega, -\mathbf{k}, -\mathbf{H}) . \quad (2.1)$$

Однако

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{H}) &\neq \varepsilon_{ji}(\omega, -\mathbf{k}, \mathbf{H}) , \\ \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{H}) &\neq \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k}, -\mathbf{H}) . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для слабого магнитного поля  $\mathbf{H}$  и малых волновых векторов  $\mathbf{k}$  можно разложить тензор диэлектрической проницаемости по степеням  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{H}) &= \varepsilon_{ij}^0(\omega) + i\gamma_{ijl}(\omega)k_l + A_{ijl}^{(1)}(\omega)H_l + \\ &+ A_{ijkl}^{(2)}(\omega)H_k H_l + B_{ijkl}^{(2)}(\omega)k_k k_l + C_{ijkl}^{(2)}(\omega)H_k k_l + \\ &+ C_{ijklm}^{(3)}(\omega)k_k H_l H_m + C_{ijklm}^{(3)}(\omega)k_k k_l H_m + C_{ijklmn}^{(4)}(\omega)k_k k_l H_m H_n + \dots . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для обратного тензора диэлектрической проницаемости справедливо аналогичное разложение:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{H}) &= \varepsilon_{0ij}^{-1}(\omega) + i\delta_{ijl}(\omega)k_l + \tilde{A}_{ijl}^{(1)}(\omega)H_l + \\ &+ \tilde{A}_{ijkl}^{(2)}(\omega)H_k H_l + \tilde{B}_{ijkl}^{(2)}(\omega)k_k k_l + \tilde{C}_{ijkl}^{(2)}(\omega)H_k k_l + \\ &+ \tilde{C}_{ijklm}^{(3)}(\omega)k_k H_l H_m + \tilde{C}_{ijklm}^{(3)}(\omega)k_k k_l H_m + \tilde{C}_{ijklmn}^{(4)}(\omega)k_k k_l H_m H_n + \dots . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Все рассматриваемые здесь оптические явления могут наблюдаться в широкой области спектра от радиочастот до рентгеновского диапазона, но наиболее ярко они проявляются вблизи резонансных частот в кристаллах. Вблизи резонансных частот экситонов все оптические явления усиливаются, поэтому мы будем рассматривать свойства тензора  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{H})$  в этой области. Это нисколько не нарушает общности нашего рассмотрения, все полученные результаты справедливы и вдалеке от резонансных частот в кристалле.

Тензор  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{H})$  устанавливает связь между индукцией  $\mathbf{D}$ , полем  $\mathbf{E}$ , и статическим внешним полем  $\mathbf{H}$ . Как уже отмечалось, все рассматриваемые в дальнейшем эффекты могут иметь обратные эффекты. Так, например, эффект Фарадея можно сформулировать как «возникновение круговой поляризации у распространяющегося в среде света, под действием магнитного поля». Тогда обратный эффект Фарадея будет выглядеть как «возникновение намагнитченности среды под действием циркулярно поляризованного света». Некоторые из обратных эффектов уже обнаружены, но многие другие еще ждут своего часа.

Рассмотрим детально все члены разложения тензора  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  в (2.3).

### 3. Частотная дисперсия и двойное лучепреломление

Первое слагаемое в (2.3) - тензор  $\varepsilon_{ij}^0(\omega)$  - описывает явления частотной дисперсии и двойного лучепреломления. Частотная дисперсия - это зависимость тензора  $\varepsilon_{ij}^0(\omega)$  от частоты. Конкретный вид частотной зависимости диэлектрической проницаемости можно получить только из микроскопических квантовомеханических расчетов. Можно записать самый общий вид функции диэлектрического отклика, каковой является диэлектрическая проницаемость, в виде

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \frac{e^2}{m} \sum_l \frac{f_l}{\omega_l^2 - \omega^2 + 2i\omega_l\Gamma_l}, \quad (3.1)$$

где:  $\omega_l$  - частоты различных резонансов в среде,  $f_l$  - силы осциллятора этих резонансов,  $\Gamma_l$  - константы затухания.

Приблизительный, качественный ход вещественной части показателя преломления как функции частоты представлен на рисунке 3.1.

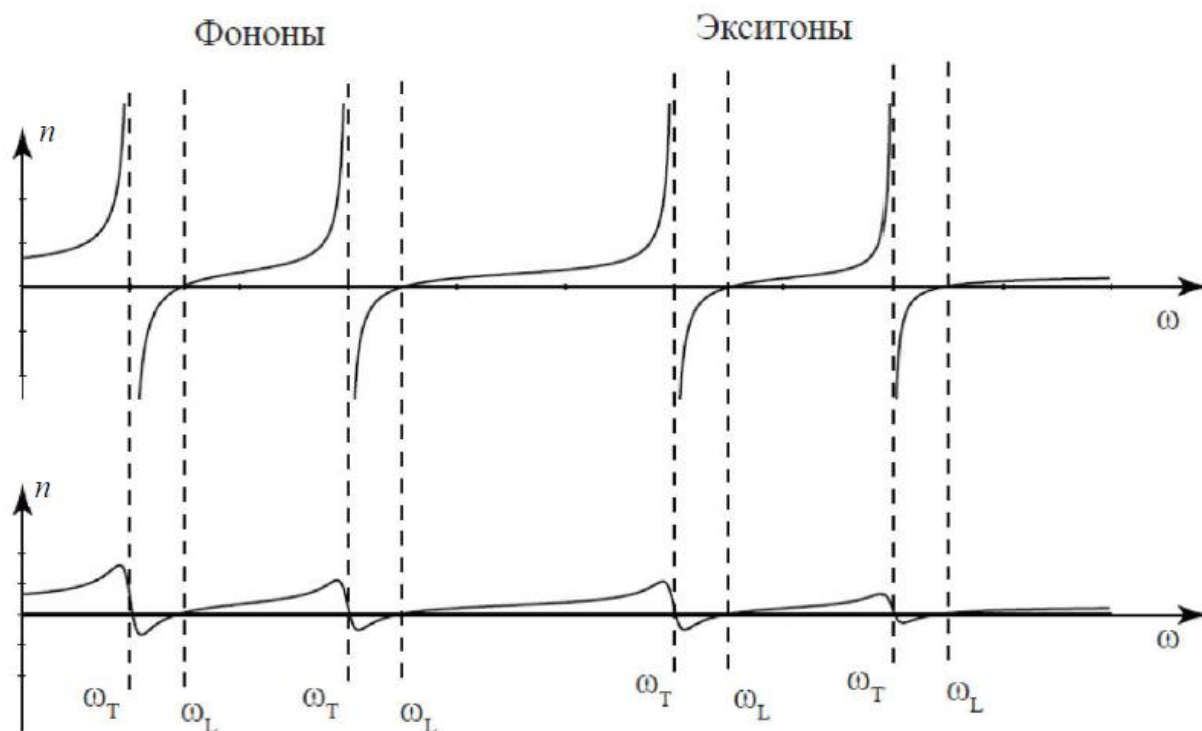


Рис 3.1 Качественная зависимость вещественной части показателя преломления  $n$  от частоты  $\omega$  в широкой спектральной области. Вблизи каждого из резонансов:  $\omega_T$  - резонансная частота;  $\omega_L$  - продольная частота, определяется условием  $\varepsilon(\omega_L) = 0$ . а) без учета затухания, б) с учетом затухания.

Видно, что, во-первых, показатель преломления в целом падает с ростом частоты, во-вторых, в кристалле имеется целый ряд резонансных частот. Действительно, на низких частотах в электромагнитный отклик кристалла могут вносить вклад все резонансы, связанные с

ориентацией молекул, с колебаниями атомов и с различными электронными возбуждениями. Однако на высоких частотах вклад низкочастотных колебаний падает, и в показатель преломления вносят вклад только «быстрые» процессы, связанные с экситонными и более высокими по энергии возбуждениями.

Для нормальных волн в кристаллах было получено (1.16):

$$\mathbf{D} = \tilde{n}^2(\omega) \{ \mathbf{E}(\omega, \mathbf{s}) - \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}(\omega, \mathbf{s})) \} , \quad (3.2)$$

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{s} = 0 ,$$

Или в компонентах:

$$\varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega, \mathbf{s}) = \tilde{n}^2(\omega) \{ E_i(\omega, \mathbf{s}) - s_i s_j E_j(\omega, \mathbf{s}) \} . \quad (3.3)$$

Дисперсионное уравнение получается как условие разрешимости этого уравнения. Если известен тензор диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}(\omega)$ , то можно найти комплексный показатель преломления и все нормальные волны в данном кристалле. Дисперсионное уравнение удобно рассматривать в главных осях тензора  $\varepsilon_{ij}(\omega)$ .

Для кристаллов разной симметрии тензор  $\varepsilon_{ij}(\omega)$  в главных осях выглядит следующим образом:

Система	Главные оси	Тензор
Триклинная	Не фиксированы	$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$
Моноклинная	Ось $y$ направлена по оси второго порядка или перпендикулярно плоскости симметрии	$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ \varepsilon_{13} & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$
Ромбическая	Оси $x, y, z$ направлены по осям 2 го порядка, а в классе $C_{2v}$ оси $x, y$ перпендикулярны плоскости симметрии	$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$
Тетрагональная	В классах $C_4, S_4$ и $C_{4h}$ фиксирована только ось $z$ (4 порядка). В классах $D_4, C_{4v}, D_{2d}$ и $D_{4h}$ фиксированы все оси	$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}$
Тригональная	В классах $C_3$ и $C_{3i}$ фиксирована только ось $z$ (третьего порядка). В классах $D_3, C_{3v}$ и $D_{3d}$ фиксированы все оси	$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}$
Гексагональная	В классах $C_6, C_{3h}$ и $C_{6h}$ фиксирована только ось $z$ (6 порядка)	$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}$
Кубическая	Фиксированы все оси (оси $x, y, z$ - оси второго порядка в классах $T$ и $T_h$ и оси 4 го порядка в классах $O, T_d$ и $O_h$ )	$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$
Изотропная среда	Выбор осей произволен	$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$

Непосредственно из уравнения (3.3) в главных осях  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$  получаем дисперсионное уравнение:

$$\tilde{n}^2 \left( \varepsilon_{xx} \tilde{n}_x^2 + \varepsilon_{yy} \tilde{n}_y^2 + \varepsilon_{zz} \tilde{n}_z^2 \right) - \left[ \tilde{n}_x^2 \varepsilon_{xx} (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \tilde{n}_y^2 \varepsilon_{yy} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) + \tilde{n}_z^2 \varepsilon_{zz} (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}) \right] + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} = 0, \quad (3.4)$$

где:  $\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, \tilde{n}_z$  компоненты показателя преломления в осях  $x, y, z$  .

Это уравнение называется *уравнением Френеля*, оно определяет в главных осях тензора некую поверхность – «*поверхность волновых векторов*». Дисперсионное уравнение для обратного диэлектрического тензора (1.21) допускает простую интерпретацию. Построим в координатах главных осей тензора диэлектрической проницаемости поверхность, которая определяется уравнением:

$$\varepsilon_{ij}^{-1} x_i x_j = \frac{x^2}{\varepsilon_{xx}} + \frac{y^2}{\varepsilon_{yy}} + \frac{z^2}{\varepsilon_{zz}} = 1 . \quad (3.5)$$

Поверхность волновых векторов в кристалле представляет собой эллипсоид. Если пересечь эллипсоид плоскостью, проходящей через его центр перпендикулярно к заданному направлению распространения волны, то сечением эллипсоида плоскостью будет эллипс. Длина его главных осей определяет значение показателя преломления, а направления осей определяют направления вектора  $\mathbf{D}$  (Рисунок 3.2) .

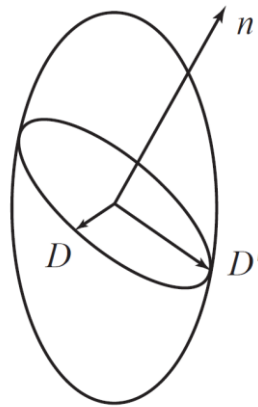


Рис 3.2. Эллипсоид волновых векторов (3.5) в кристалле произвольной симметрии. Вектор  $n$  указывает направление распространения волны.

Пример: Двулучепреломление [9].

Для кубических кристаллов все главные значения тензора  $\varepsilon_{ij}(\omega)$  одинаковы, и кубический кристалл (в отсутствие пространственной дисперсии) ведет себя так же как изотропная среда.

Для одноосных кристаллов можно выбрать главные оси так, чтобы  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp}$  и  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\parallel}$ . В таких кристаллах имеются две независимых компоненты диэлектрического тензора. К одноосным относятся кристаллы тетрагональной, тригональной, гексагональной систем.

В одноосном кристалле уравнение Френеля принимает вид:

$$\tilde{n}^2 (\tilde{n}^2 - \varepsilon_{\perp}) \left[ \varepsilon_{\parallel} \tilde{n}^2 s_z^2 + \varepsilon_{\perp} \tilde{n}^2 (s_x^2 + s_y^2) - \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \right] = 0 . \quad (3.6)$$

Первый корень (3.6) равен:

$$\tilde{n}_1^2 = \varepsilon_{\perp} ,$$



второй корень приводит к уравнению

$$\frac{\tilde{n}^2 s_z^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\tilde{n}^2 (s_x^2 + s_y^2)}{\varepsilon_{\parallel}} = 1, \quad (3.7a)$$

где  $\varepsilon_{\perp}$  и  $\varepsilon_{\parallel}$  главные значения тензора диэлектрической проницаемости.

Это значит, что поверхность волновых векторов распадается на две отдельные поверхности – сферу и эллипсоид вращения. Сферическая поверхность соответствует независимости волнового вектора от направления. Это направление называется направлением *обыкновенной волны*, для которой кристалл похож на изотропное тело с показателем преломления  $\tilde{n}_1^2$ . Волна, соответствующая эллипсоиду, называется *необыкновенной*, ее показатель преломления

$$\tilde{n}_2^2 = \frac{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel} s_z^2 + \varepsilon_{\perp} (s_x^2 + s_y^2)}. \quad (3.7б)$$

Для этой волны величина волнового вектора зависит от угла наклона волнового вектора к оптической оси кристалла  $z$ .

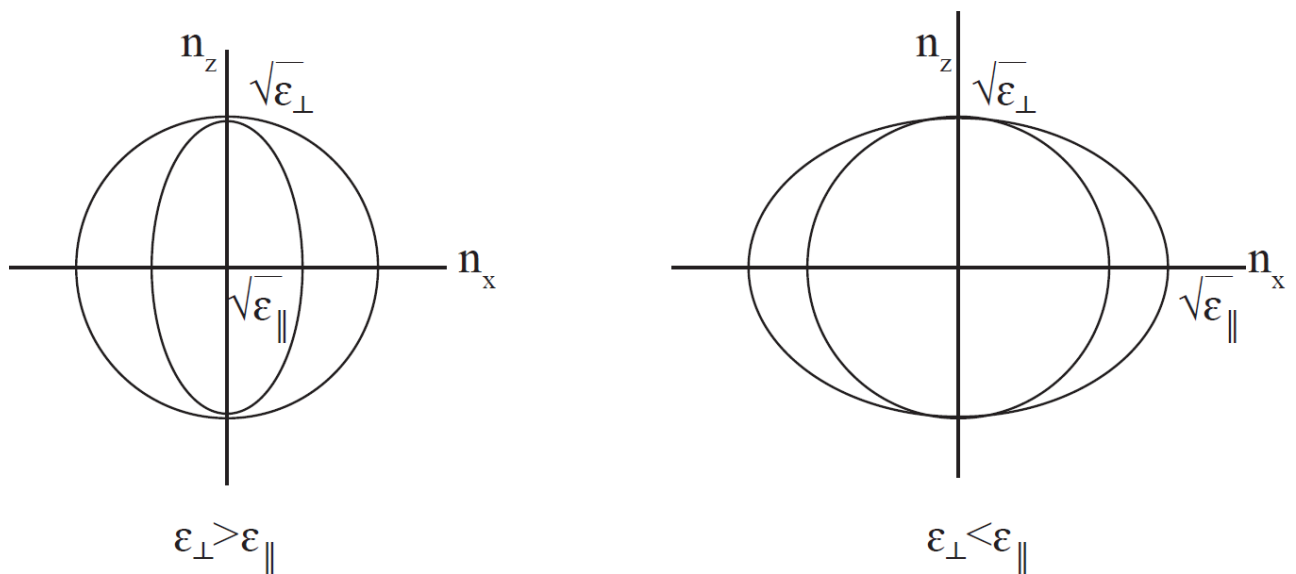


Рис 3.3. Поверхность волновых векторов в одноосном кристалле (3.7) получается при сечении эллипсоида волновых векторов (Рис.3.2) плоскостью.

Вектор  $\mathbf{D}$  всегда ортогонален волновому вектору и в обыкновенной и в необыкновенной волне. Вектор  $\mathbf{E}$  в обыкновенной волне перпендикулярен волновому вектору  $\mathbf{k}$ . В необыкновенной волне вектор  $\mathbf{E}$  имеет как поперечную, так и продольную компоненту.

Для поперечных волн:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \tilde{n}^2 \mathbf{E}, \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = 0, \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{D} &= 0, \quad D_i = \varepsilon_{ij} E_j. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Условие  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = 0$  является определением поперечной волны, остальные равенства в (3.8) являются следствием этого. Для поперечной волны векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  параллельны друг другу. В анизотропной среде это случается редко, отыскание поперечных волн эквивалентно нахождению собственных векторов матрицы  $\varepsilon_{ij}$ .

*Для продольных волн:*

$\mathbf{E} = E \cdot \mathbf{s}$ , отсюда  $\mathbf{D} = 0$  и  $\mathbf{V} = 0$ , следовательно  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ . Это является необходимым условием для продольной волны.

В кристалле произвольной симметрии продольные, и поперечные волны могут распространяться только в исключительных направлениях. В кубическом кристалле, когда  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$  продольные волны могут распространяться в любом направлении, если  $\varepsilon(\omega_{\parallel}) = 0$ . Но в ромбоэдрических кристаллах, где  $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$  они могут существовать только в случае равенства нулю одного из значений  $\varepsilon_i(\omega)$ .

Для двусных кристаллов все три компоненты тензора диэлектрической проницаемости в главных осях различны по величине. Это заметно усложняет картину распространения волн в таких кристаллах.

Вблизи экситонных резонансов явление двупреломления может быть связано с тем, что резонансные частоты экситонов  $\omega_i$  и/или дипольные матричные элементы экситонных переходов  $d_i$  зависят от направления распространения волны в кристалле.

Помимо двулучепреломления в оптике может наблюдаться и явление дихроизма. Если двулучепреломление связано с различием вещественных частей показателя преломления для разных направлений, то дихроизм связан с различием его мнимых частей. Хорошо известный пример проявления линейного дихроизма - это пленочный поляризатор, в котором одна из поляризаций сильно поглощается, а другая относительно свободно проходит через среду. Встречается и циркулярный дихроизм.