Здесь $H_c(-i\nabla_e)$ гамильтониан электрона в зоне проводимости:

$$\hat{H}_c(-i\nabla_e) = \hbar^2\nabla_e^2 / 2m_e \tag{П1.35}$$

$H_v(-i\nabla_h)$ гамильтониан Латтинжера дырок в валентной зоне. В сферическом приближении:

$$-\hat{H}_v(-i\nabla_h) = -\frac{\hbar^2}{2m_0}[(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma)\nabla_h^2\mathbf{I} - 2\gamma(\vec{J}\cdot\nabla_h)^2] \ , \tag{П1.36}$$

где $\gamma = (2\gamma_2 + 3\gamma_3)/5$, где γ_1, γ_2, γ_3 - параметры Латтинжера, m_e - эффективная масса электрона, $\vec{J}$ - матрицы углового момента 3/2:

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3/2} & 0 & 0 \\ \sqrt{3/2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{3/2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3/2} & 0 \end{pmatrix}, \ J_y = \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3/2} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3/2} & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i\sqrt{3/2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3/2} & 0 \end{pmatrix} i \ ,$$

$$J_z = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}, \tag{П1.37}$$

ε - статическая диэлектрическая проницаемость, $\mathbf{I}$ - единичная матрица 4×4

Введем координаты центра масс и относительные координаты $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$, а также импульс центра масс и относительный импульс $\hat{\mathbf{P}}$, $\hat{\mathbf{p}}$ используя линейное преобразование:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h \qquad -i\hbar\nabla_e = (\hat{\mathbf{p}} + \alpha\hat{\mathbf{P}}) \ ,$$
$$\mathbf{R} = \alpha\mathbf{r}_e + \beta\mathbf{r}_h \qquad -i\hbar\nabla_h = (-\hat{\mathbf{p}} + \beta\hat{\mathbf{P}}) \ .$$

Здесь: $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}_{\mathbf{r}}$, $\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\vec{\nabla}_{\mathbf{R}}$.

Можно выбирать β и α более или менее произвольным образом. Попробуем найти такие значения β и α, чтобы разделить движение центра масс и внутреннее движение в экситоне. В классической механике это всегда возможно. Так как длина любого вектора должна сохраняться при любом пространственном преобразовании соответствующий детерминант должен быть равен единице, следовательно $\alpha + \beta = 1$.

Запишем гамильтониан (П1.30) в виде суммы трех слагаемых:

$$\hat{H} = \hat{H}_1(\mathbf{r}) + \hat{H}_2(\mathbf{R}) + \hat{H}_3(\mathbf{r},\mathbf{R}),$$

$$\hat{H}_1(r) = \frac{1}{2m_e}\hat{\mathbf{p}}^2\mathbf{I} + \frac{1}{2m_0}(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma)\hat{\mathbf{p}}^2\mathbf{I} - \frac{\gamma}{m_0}(\hat{\mathbf{p}}\vec{J})^2 - \frac{e^2}{\varepsilon|\vec{r}|}, \tag{П1.38}$$

$$\hat{H}_2(R) = \frac{\alpha^2}{2m_e}\hat{\mathbf{P}}^2\mathbf{I} + \frac{\beta^2}{2m_0}(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma)\hat{\mathbf{P}}^2\mathbf{I} - \frac{\gamma}{m_0}\beta^2(\hat{\mathbf{P}}\cdot\vec{J})^2, \tag{П1.39}$$

$$\hat{H}_3(\mathbf{r},\mathbf{R}) = \frac{\alpha}{m_e}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{P}})\mathbf{I} - \frac{\beta}{m_0}(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma)(\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{P}})\mathbf{I} + \frac{\beta\gamma}{m_0}\{(\hat{\mathbf{p}}\cdot\vec{J})(\hat{\mathbf{P}}\cdot\vec{J})\}. \quad (\text{П}1.40)$$

Здесь: $\{\hat{A}\hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ означает коммутатор операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Слагаемое (П1.38) описывает внутреннее движение в экситонах с тяжелой и легкой приведенной массой. Слагаемое (П1.39) описывает свободное движение центра масс тяжелого и легкого экситонов. Если бы не было слагаемого (П1.40), мы могли бы решить по отдельности задачу с гамильтонианом (П1.39) для неподвижного экситона, как это сделано в [**29**] и задачу с гамильтонианом (П1.39) для свободного движения центра масс экситона.

Коэффициенты β и α могут быть разными для разных координат. Это значит, что $\alpha+\beta$, в общем случае может быть тензором второго ранга [**29**]. Их можно выбирать более или менее произвольно [**30**]. Мы будем считать их скалярами.

Волновые функции уравнения (П1.34) выберем в виде:

$$\Phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}_h) = \Phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r},\mathbf{R}) = \varphi(\mathbf{r})\exp(i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}) \quad (\text{П}1.41)$$

Для простоты положим $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Это не самый удачный выбор, но он наиболее простой. Тогда получим

$$\hat{H}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m_e}\hat{\mathbf{p}}^2\mathbf{I} + \frac{1}{2m_0}(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma)\hat{\mathbf{p}}^2\mathbf{I} - \frac{\gamma}{m_0}(\hat{\mathbf{p}}\vec{J})^2 - \frac{e^2}{\varepsilon|\vec{r}|}, \quad (\text{П}1.42)$$

$$\hat{H}_2(\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{K}^2}{2m_e}, \quad (\text{П}1.43)$$

$$\hat{H}_3(\mathbf{r},\mathbf{R}) = \frac{(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{K})}{m_e}. \quad (\text{П}1.44)$$

Гамильтониан $\hat{H}_1(\mathbf{r})$ не зависящий от движения экситона как целого не зависит от выбора β и α и описывает состояния покоящегося экситона. Эта задача была решена в работе [**29**]. $\hat{H}_2(\mathbf{R})$ - описывает свободное движение экситона как целого. $\hat{H}_3(\mathbf{r},\mathbf{R})$ - смешанный член. Он описывает смешивание внутреннего движения в экситоне и движения его центра масс.

Волновая функция основного состояния покоящегося экситона представляет собой линейную комбинацию функций S и D типа. Благодаря $\hat{H}_3(\mathbf{r},\mathbf{R})$ к функции основного состояния подмешивается функции P типа.

В силу трансляционной инвариантности, центр масс экситона может свободно перемещаться по кристаллу, однако внутреннее движение в экситоне может зависеть от движения его центра масс. Яркий пример этого можно видеть в кубическом кристалле, где движение центра масс экситона приводит к смешиванию основного состояния экситона и возбужденных состояний P типа.

<u>Пример 4 *Волновые функции механического экситона*:</u>
Объемнвй кристалл:

$$\varphi_{\mathbf{K},i}(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{\sqrt{N_{3d}}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} F_i(\mathbf{r}) u_{e\mathbf{k}}(\mathbf{r}_e) u_{h\mathbf{k}}(\mathbf{r}_h) \ . \quad (\text{П}1.51)$$

Здесь $F_i(\mathbf{r})$ - волновая функция относительного движения электрона и дырки, $u_{e\mathbf{k}}(\mathbf{r}_e)$ и $u_{h\mathbf{k}}(\mathbf{r}_h)$ - блоховские функции в соответствующих зонах, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{R}$ - волновой вектор и координата центра масс экситона.

Квантовая яма:

$$\varphi_{\mathbf{K},i}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N_{2d}}} e^{i\mathbf{K}_{II}\cdot\boldsymbol{\rho}_{II}} f_i(\boldsymbol{\rho})\psi_e(z_e)\psi_h(z_h)u_{e\mathbf{k}}(\mathbf{r}_e)u_{h\mathbf{k}}(\mathbf{r}_h) \quad . \qquad (\text{П}1.52)$$

Здесь $f_i(\boldsymbol{\rho})$ - волновая функция относительного движения в i экситоне в плоскости квантовой ямы; огибающие волновые функции движения перпендикулярно плоскости ямы: $\psi_e(z_e)$ для электронов и $\psi_h(z_h)$ для дырок.

Квантовая точка:

$$\varphi_{\mathbf{K},i}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N_{0d}}} \psi_{ie}(\mathbf{r}_e)\psi_{ih}(\mathbf{r}_h)u_{e\mathbf{k}}(\mathbf{r}_e)u_{h\mathbf{k}}(\mathbf{r}_h) \quad . \qquad (\text{П}1.53)$$

N_{3d}, N_{2d}, N_{0d} - нормировочные множители в трехмерном, двумерном и нульмерном случаях. В трехмерном случае экситон может возбуждаться в любой ячейке кристалла, и N_{3d} равен объему элементарной ячейки умноженному на число ячеек в кристалле [**7**]. В двумерном случае N_{2d} равен произведению ширины квантовой ямы на площадь кристалла [**8**]. В нульмерном случае N_{0d} равен объему квантовой точки.

Приложение 2. ***Экситонный вклад в тензор диэлектрической проницаемости***

Как уже говорилось, экситоном мы называем возбужденное состояние электронной подсистемы кристалла. Это состояние принадлежит не отдельным атомам, а всему кристаллу. Экситон может родиться в любой точке кристалла. Поэтому оно дает заметный вклад в диэлектрический отклик.

Обозначим полный гамильтониан электронной подсистемы кристалла $\hat{H}_e$ (П1.1). Основное состояние кристалла, в состоянии равновесия, когда все N электронов полностью заполняют валентную зону, как известно, можно описать с помощью многоэлектронной волновой функции $\Psi_0\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...,\mathbf{r}_N\right)$, представляющей собой детерминант, составленный из одноэлектронных, например блоховских, функций (П1.3). Кристалл переходит в возбужденное состояние за счет возмущения, вызванного внешним электромагнитным полем $\hat{H}_{er}$. Возмущенное внешним полем состояние кристалла Φ_{exc} представим в виде $\Phi_{exc} = \Psi_0 + \Psi$, и подставим в уравнение Шредингера.

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_e\right]\Phi_{exc} = \hat{H}_{er}\Phi_{exc} \ , \qquad (\text{П}2.1)$$

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_e\right]\Psi_0 = 0 \ . \qquad (\text{П}2.2)$$

Здесь $\Psi\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...\mathbf{r}_N\right)$ волновая функция ысего кристалла, когда в нем возбужден экситон. Нам не нужно здесь конкретизировать ее вид и можем считать, что она выбрана в самом общем виде. Разложим Ψ по всем однодетерминантным состояниям кристалла $\Phi_{i,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N)$, то есть по состояниям, представляющим собой детерминанты, составленные из одноэлектронных волновых функций в которых волновые функции валентной зоны одного из столбцов заменены на волновые функции зоны проводимости (П1.9).

Эти функции соответствуют состояниям скоррелированных электронно-дырочной пары, не связанной кулоновским взаимодействием. Для учета кулоновского взаимодействия следует брать линейные комбинации таких функций (П1.20).

В силу требований трансляционной инвариантности волновой функции, волновой вектор $\mathbf{K}$ центра масс электрон-дырочной пары сохраняется. Таким образом, в линейную комбинацию детерминантов должны входить только функции с заданным $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1' - \mathbf{k}_2' = \mathbf{K} \ , \ \Phi_{i,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N) = \Phi_{i,\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\mathbf{k}-\frac{1}{2}\mathbf{K}}\left(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N\right) \ .$$

Тогда искомое разложение имеет вид:

$$\Phi_{exc} = \sum_i C_i(t,\mathbf{K})\Phi_{i,\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\mathbf{k}-\frac{1}{2}\mathbf{K}}\left(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N\right) \ . \qquad (\text{П}2.3)$$

Зависимость от времени отражает тот факт, что рассматриваемое состояние Φ_{exc}, в отличие от Ψ_0, не является стационарным состоянием кристалла. Подставим функцию Φ_{exc} в (П2.1):

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_e\right]\left(\Psi_0 + \Psi\right) = \hat{H}_{er}\left(\Psi_0 + \Psi\right) \ . \qquad (\text{П}2.4)$$

Считаем, что $\hat{H}_{er}\Psi$ мало по сравнению с $\hat{H}_{er}\Psi_0$, и учитывая (П2.1) получим,

$$\sum_i \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_e \right] C_i(t,\mathbf{K})\Phi_{i,\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\mathbf{k}-\frac{1}{2}\mathbf{K}}\left(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N\right) = \hat{H}_{er}\Psi_0\left(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N\right) \ . \qquad (\text{П}2.5)$$

В приложении 1 было показано, что матричные элементы $\hat{H}_e$ на функциях $\Phi_{i,\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\mathbf{k}-\frac{1}{2}\mathbf{K}}\left(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N\right)$ представляют собой энергии механических экситонов.

Разложим $\hat{H}_{er}\Psi_0$ по полной системе состояний механического экситона $\left\{\Phi_{i,\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\mathbf{k}-\frac{1}{2}\mathbf{K}}\left(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N\right)\right\}$:

$$\hat{H}_{er}\Psi_0 = \sum_i W_{\mathbf{K},0,i}\Phi_{i,\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\mathbf{k}-\frac{1}{2}\mathbf{K}}\left(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N\right) \ , \qquad (\text{П}2.6)$$

$$W_{\mathbf{K},0,i} = \left\langle \Phi_{i,\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\mathbf{k}-\frac{1}{2}\mathbf{K}}\left(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N\right) \middle| \hat{H}_{er} \middle| \Psi_0 \right\rangle \ .$$

Получаем систему уравнений

$$\sum_i \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_e \right] C_i(t,\mathbf{K})\Phi_{i,\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\mathbf{k}-\frac{1}{2}\mathbf{K}}\left(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N\right) = \sum_i W_{\mathbf{K},0,i}\Phi_{i,\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\mathbf{k}-\frac{1}{2}\mathbf{K}}\left(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N\right) \ . \qquad (\text{П}2.7)$$

Оператор взаимодействия электромагнитного поля с электронной системой кристалла

$$\hat{H}_{er} = \frac{e}{mc}\sum_i \left(\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{p}_i \right) \ , \qquad (\text{П}2.8)$$

Матричный элемент перехода кристалла их основного состояния в возбужденное имеет вид:

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{K},0,i} &= \left\langle \Phi_{\mathbf{K},i} \middle| \hat{H}_{er} \middle| \Psi_0 \right\rangle = \frac{e}{mc}\left\langle \Phi_{\mathbf{K},i} \middle| \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{p}} \middle| \Psi_0 \right\rangle = \frac{e}{mc}\left(-\frac{ic}{\omega}\right)\left\langle \Phi_{\mathbf{K},i} \middle| \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{p}} \middle| \Psi_0 \right\rangle = \\ &= \frac{e}{mc}\left(-\frac{ic}{\omega}\right)\frac{im\omega}{e}\left\langle \Phi_{\mathbf{K},i} \middle| \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{d}} \middle| \Psi_0 \right\rangle = \left\langle \Phi_{\mathbf{K},i} \middle| \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{d}} \middle| \Psi_0 \right\rangle \end{aligned} \ . \qquad (\text{П}2.9)$$

Здесь использована связь матричного элемента импульса p_{nm} и матричного элемента дипольного момента d_{nm}: $p_{nm} = \frac{i\omega_{nm} m}{e} d_{nm}$, а также то, что $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = ik\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$.

Иногда, например, в наноструктурах, следует учитывать нелокальность взаимодействия экситона и электромагнитного поля, в этом случае следует проинтегрировать скалярное произведение $(\mathbf{E}\cdot\mathbf{d})$ по объему кристалла

$$\hat{H}_{er} = \int \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{d}_i(\mathbf{r})d\mathbf{r} \ . \qquad (\text{П}2.10)$$

Умножив уравнение (П2.7) слева на $\Phi_{i,\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\mathbf{k}-\frac{1}{2}\mathbf{K}}\left(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N\right)$ и интегрируя, получим:

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}_{ij}\right]C_i(t,\mathbf{K})=\left\langle \Phi_{i,\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\mathbf{k}-\frac{1}{2}\mathbf{K}}\left(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N\right)\left|\mathbf{E}(t,\mathbf{r})\cdot\hat{\mathbf{d}}\right|\Psi_0\right\rangle, \qquad (\text{П2.11})$$

где $\hat{H}_{ij}$ матричные элементы гамильтониана механического экситона. В простейшем случае с учетом обменного взаимодействия и пространственной дисперсии имеем:

$$\hat{H}_{ij}=\left(\Delta^i_{exc}\sigma\cdot J+\hbar\omega_i+\frac{\hbar^2K^2}{2M_i}\right)\delta_{ij} \ . \qquad (\text{П2.12})$$

Здесь ω_i - резонансные частоты механических (без учета взаимодействия с электромагнитным полем) экситонов, Δ^i_{exc} - константа обменного взаимодействия, $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{J}$ - спиновые матрицы зоны проводимости и валентной зоны соответственно, M_i - эффективная масса i - экситонного состояния, $\mathbf{K}$ - его волновой вектор.

Фурье образ функции $C_i(t,\mathbf{K})$ представляет собой огибающую волновую функцию экситона в методе эффективной массы $\varphi_{\mathbf{K},i}\left(\mathbf{r}\right)$.

Рассмотрим общее уравнение для объемного экситона (П2.11):

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}_{ij}\right]C_i(t,\mathbf{K})=\left\langle \Phi_{i,\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\mathbf{k}-\frac{1}{2}\mathbf{K}}\left(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N\right)\left|\mathbf{E}(t,\mathbf{r})\cdot\hat{\mathbf{d}}\right|\Psi_0\right\rangle$$

Учитывая малость волнового вектора света $\mathbf{K}=\mathbf{k}_e-\mathbf{k}_h$ и используя волновые функции (П1.26б) получим в правой части (П2.11):

$$\left\langle \Phi_{i,\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\mathbf{k}-\frac{1}{2}\mathbf{K}}\left(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N\right)\left|\mathbf{E}(t,\mathbf{r})\cdot\hat{\mathbf{d}}\right|\Psi_0\right\rangle=\frac{iep_{cv}}{\omega_0 m_0}F_i(0)E_0 \qquad (\text{П2.13})$$

Здесь $F_i(0)$ величина волновой функции относительного движения при $\left|\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_h\right|=0$.

Уравнение (П2.13) для объемного экситона перепишется

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}_{ij}\right]C_i(t,\mathbf{K})=\frac{iep_{cv}}{\omega_0 m_0}F_i(0)E_0 \ . \qquad (\text{П2.14})$$

Переходя к Фурье-образам, получим систему уравнений для коэффициентов $C_i\left(\mathbf{K},t\right)$:

$$\left[\hat{H}_{ij}\left(\mathbf{K}\right)-\hbar\omega_i\delta_{ij}\right]C_i\left(\omega,\mathbf{K}\right)=\mathbf{d}_i\left(\mathbf{K}\right)\cdot\mathbf{E}\left(\omega,\mathbf{K}\right) \ . \qquad (\text{П2.15})$$

Можно определить вектор поляризации $\mathbf{P}_{exc}$, связанный с возбуждением экситона:

$$\mathbf{P}^{exc}=\left\langle\Phi\left|\hat{d}\left(r\right)\right|\Phi\right\rangle\approx\left\langle\Psi_0\left|\hat{d}\left(\mathbf{r}\right)\right|\Psi\right\rangle=\sum_i C_i\left(\mathbf{K},t\right)\varphi^*_{i,\mathbf{K}}\left(\mathbf{r},\mathbf{R}\right)=\sum_i\mathbf{P}^{exc}_i \ . \qquad (\text{П2.16})$$

Для вектора поляризации получим:

$$\left[\hat{H}_{ij}(\mathbf{K}) - \hbar\omega\delta_{ij}\right] P_i^{exc}(\omega, \mathbf{K}) = d_i(\mathbf{K}) \cdot d_j^*(\mathbf{K}) E_j(\omega, \mathbf{K}) \ . \tag{П2.17}$$

Отсюда получаем выражение для тензора восприимчивости и тензора диэлектрической проницаемости для конкретной модели экситона

$$\chi_{ij}(\omega, \mathbf{K}) = \frac{d_i(\mathbf{K}) \cdot d_j^*(\mathbf{K})}{\omega_i(\mathbf{K}) - \omega - i\Gamma} \tag{П2.18}$$

и

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{K}) = \varepsilon_0 \delta_{ij} + 4\pi \frac{d_i(\mathbf{K}) \cdot d_j^*(\mathbf{K})}{\omega_i(\mathbf{K}) - \omega - i\Gamma} \tag{П2.19}$$

Здесь ε_0 - фоновая диэлектрическая проницаемость на частоте экситонного резонанса, $\omega_i(\mathbf{K})$ - резонансные частоты экситонов, учитывающие квадратичную пространственную дисперсию, Γ - экситонное затухание, связанное с диссипативными процессами, $d_i(\mathbf{K})$ - дипольный матричный элемент оптического перехода в i экситонного состояние, индексы i и j включают в себя также и направление поляризации.

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц «Статистическая физика», Москва, Наука 1964 с.567
2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц «Электродинамика сплошных сред», Москва, Наука 1992 с.661
3. Р. Нокс "Теория экситонов" Москва, Мир 1966, с.219
4. Ф. Бассани, Дж. Пастори Паравичини «Электронные состояния и оптические переходы в твердых телах» Москва, Наука 1982, с.391
5. Г. Хаккен «*Теория экситонов в кристаллах*» УФН Т.**118**, с.565-616 (1959)
6. В.А. Киселев, А.Г. Жилич «Влияние обменного взаимодействия на экситонный спектр полупроводников» сб. Проблемы теоретической физики. Стр.165-181, Издательство Ленинградского Университета 1974
7. R.J. Elliott
«Intensity of Optical Absorption by Excitons»
Phys. Rev.108, 1384-1389 (1957)
8. J. Feldmann, G. Peter, E.O. Göbel, P. Dawson, K. Moore, C. Foxon, and R.J. Elliott
«*Linewidth dependence of radiative exciton lifetimes in quantum wells*»
Phys. Rev. Lett. 59, 2337 –2340 (1987)
9. Ю.И. Сиротин и М.П. Шаскольская «Основы кристаллофизики» Москва, Наука 1979, с.680
10. В.А.Кизель, В.И.Бурков «Гиротропия кристаллов» Москва, Наука 1980 с.303
11. Е.Л.Ивченко, А.В.Селькин
«Естественная оптическая активность в полупроводниках со структурой вюрцита» ЖЭТФ 76б 1837-1854 (1979)
12. Yu. A. Bychkov, E. I. Rashba
«*Effect of k-Linear Terms on Electronic Properties of 2D Systems*»
Proceedings of the 17th International Conference on the Physics of Semiconductors
pp 321-324 (1985);
Dykman I.M., Rosenbaum V.M., Vasko F.T.
«*HOT ELECTRONS IN SEMICONDUCTORS WITH QUASI-RELATIVISTIC BAND STRUCTURE*».
Physica Status Solidi (B) V. 88, № 2, pp.385-395 (1978)
13 M. O. Nestoklon, L. E. Golub, and E. L. Ivchenko
«*Spin and valley-orbit splittings in SiGe/Si heterostructures*»
Phys. Rev. B 73, pp.2353341-2353347 (2006)
14. K. Cho, S. Suga, W. Dreybrodt, F. Willmann «Theory of degenerate 1S excitons in zinc-blend-type crystals in a magnetic dfield: Exchange interaction and cubic anisotropy» . PRB 11, 1512-1521 (1975)
15. Р.П.Сейсян «Спектроскопия диамагнитных экситонов» Наука, 1984, с.272
16. Г.Е. Бир и Г.Е. Пикус «Симметрияи деформационные эффекты в полупроводниках» Москва, Наука, 1972 с.584
17. Е.Ф. Гросс, А.А. Каплянский
«*Оптическая анизотропия кубических кристаллов, вызванная явлением пространственной дисперсии. Квадрупольное экситонное поглощение света в закиси меди*»
ДАН СССР, Т.132, с.98- 103 (1960)
18. Е.Ф. Гросс, Б.П. Захарченя, О.В. Константинов
«*Эффект инверсии магнитного поля в спектре экситонного поглощения кристалла CdS*»
ФТТ Т.3, с305-309 (1961)
19. Ивченко Е.Л., Кочерешко В.П., Михайлов Г.В., Уральцев И.Н.
«*Магнитоиндуцированная пространственная дисперсия кристаллов в экситонной области спектра*» Письма в ЖЭТФ Т.37, №3, стр. 137-139 (1983)
20. О.В. Гоголин, В.А. Цветков, Е.Г. Цицишвилли
«*Магнитоиндуцированное двупреломление в кубических кристаллах*»
ЖЭТФ 87, 1038-1045 (1984)

21. Kochereshko V.; Kats,V.; Platonov A.; Sapega V.; Besombes L.; Wolverson D.; Mariette H.
«Nonreciprocal magneto-optical effects in quantum wells»
Phys. Status Solidi C Curr. Top. Solid State Phys., v.**11**, №7-8, pp.1316-1319 (2014);
Кочерешко В.П.; Кац В.Н.; Платонов А.В.
«Эффект магнитоиндуцированной пространственной дисперсии в квантовых ямах»
Изв. РАН, сер. физ., Т.**78**, 12 стр.1649-1652 (2014)
22. В.М. Агранович и В.Л. Гинзбург «Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов» Москва, Наука 1965 с.374
23. Кочерешко В.П., Михайлов Г.В., Уральцев И.Н.
«*Эффекты инверсии магнитного поля на поляритонах*»
Физика Твердого Тела Т.25, стр. 769-776 (1983)
24. D.G. Thomas and J.J. Hopfield
«*Direct observation of exciton motion in CdS*»
Phys. Rev. Lett. V.5, 505 (1960)
25. Ivchenko E.L., Kochereshko V.P., Mikhailov G.V., Uraltsev I.N.
«Resonance magneto-spatial dispersion in crystals»
Phys. Stat. Sol. (b), V.122, pp.221-230 (1984)
26. Y. Merle d'Aubigne, Le Si Dang, A. Wasiela, N. Magnea, F. d'Albo and A. Million
«*Quantization of Excitonic Polaritons in CdTe-CdZnTe double heterostructures*»
Journal de Physique. Colloque C5, V.48, C.363-366 (1987)
27. V.A. Kiselev, B.S. Razbirin, I.N. Uraltsev
«Additional waves and Fabri-Perot interference of photoexcitons (polaritons) in thin II-VI crystals»
Phys. Stat. Solidi (b) 72, p.161-172 (1975)
28. J.J. Davies, D. Wolverson, V.P. Kochereshko, A.V. Platonov, R.T.Cox, J.Cibert, H.Mariette, C. Bodin, and C. Gourgon, E.V.Ubyivovk, Yu. P. Efimov, S. A. Eliseev
«Motional enhancement of exciton magnetic moments in zincblend semiconductors»
Phys. Rev. Lett. 97, pp.1874031-1874034 (2006);
L.C. Smith, J.J. Davies, D. Wolverson, S. Crampin, R.T. Cox, J. Cibert, H. Mariette, V.P. Kochereshko, M. Wiater, G. Karczewski, and T. Wojtowicz
«Motion-dependent magnetic properties of excitons in CdTe»
Phys. Rev. B78, pp.0852041-08520413 (2008);
Davies J.J.; Smith L.C.; Wolverson D.; Gust A.; Kruse C.; Hommel D.; Kochereshko V.P.
«Motion-enhanced magnetic moments of excitons in ZnSe»
Phys. Rev. B81, №8, pp.0852081-0852085 (2010);
Smith L.C.; Davies J.J.; Wolverson D.; Boukari H.; Mariette H.; Kochereshko V.P.; Phillips R.T.
«Wave-vector dependence of magnetic properties of excitons in ZnTe»
Phys. Rev. B83, pp.1552061-1552066 (2011)
29 A. Baldereschi and N. Lipari «*Energy Levels of Direct Excitons in Semiconductors with* Degenerate Bands» Phys. Rev. B3, 439 (1971)
30 A. Siarkos, E. Runge, R. Zimmermann «*Center-of-mass properties of the exciton in quantum wells*» Phys. Rev. B61, 10854 (2000)
31 K. Cho, S. Suga, W. Deybrodt, F. Willmann «*Theory of degenerate 1s excitons in zinc-blende-type crystals in a magnetic field: Exchange interaction and cubic anisotropy*» Phys. Rev. **B11**, 1512 (1975)